

## 1 Zahlen

**Bruchterme** sind z.B.:  $\frac{x+2}{x-1}$ ;  $\frac{a+2b}{3a}$ ;  $\frac{1}{4a+5}$

### 1.1 Kürzen

In Faktoren zerlegen:  $\frac{3x^2 - 3x}{3x^2(x+3)} = \frac{3x(x-1)}{3x \cdot x(x+3)} =$

Gemeinsame Faktoren kürzen:  $\frac{x-1}{x(x+3)}$

### 1.2 Addieren und Subtrahieren

$$\text{Bsp.: } \frac{1}{2x} + \frac{1,5}{x-2} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 2\}$$

Hauptnenner bestimmen: HN:  $2x(x-2)$

Auf HN erweitern:  $\frac{1 \cdot (x-2)}{2x(x-2)} + \frac{1,5 \cdot 2x}{(x-2) \cdot 2x} =$

Zähler zusammenfassen:  $\frac{x-2+3x}{2x(x-2)} = \frac{4x-2}{2x(x-2)} =$

In Faktoren zerlegen und kürzen:  $\frac{2(2x-1)}{2x(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)}$

### 1.3 Multiplizieren und Dividieren

**Beispiele:**

$$1. \quad \frac{x-3}{x} \cdot \frac{2}{x-3} = \frac{(x-3) \cdot 2}{x \cdot (x-3)} = \frac{2}{x} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$$

$$2. \quad \frac{x+1}{4} : \frac{3-x}{4} = \frac{x+1}{4} \cdot \frac{4}{3-x} = \frac{(x+1) \cdot 4}{4 \cdot (3-x)} = \frac{x+1}{3-x} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$$

## 1.4 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

### a) Gleichungen




Jede **lineare Gleichung** lässt sich auf die Form  $ax + b = 0$  bringen.

Lösung der Gleichung ist die Nullstelle der Geraden  $y = ax + b$ .

### b) Ungleichungen

Beispiele:  $x > 2$ ;  $2a < b$ ;  $x+1 \geq 5$ ;  $3 \leq a+2$

Die Lösungsmenge einer Ungleichungen bleibt gleich, wenn man:

-  auf beiden Seiten dieselbe rationale Zahl bzw. denselben Term addiert oder subtrahiert.
-  beide Seiten mit einem **positivem** Term multipliziert oder durch diesen dividiert.
-  beide Seiten mit einem **negativen** Term multipliziert oder durch diesen dividiert und *gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umdreht*.

Die **Lösungsmenge** einer Ungleichung wird entweder in aufzählender Form oder in Intervallschreibweise angegeben.

### Beispiele:

$$G = \mathbb{Z} : \quad x + 2 > 3 \quad \mathbf{L} = \{2; 3; 4; \dots\}$$

$$G = \mathbb{Q} : \quad x + 2 > 3 \quad \mathbf{L} = \{x \mid x > 1\} = ]1; \infty[$$

Intervallarten:

$]1; 4[$  „offenes Intervall von 1 bis 4“

$[-2; 6]$  „geschlossenes Intervall von -2 bis 6“

$[-4,5; \infty[$  „halboffenes Intervall von -4,5 bis unendlich“

c) *Produktgleichungen und Produktungleichungen*

**Produktgleichung**

Beispiel:  $(x-3)(5+x)=0$   $L = \{-5; 3\}$

Ein Produkt besitzt den Wert Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

**Produkt-Ungleichungen** werden mit Tabellen gelöst:

**Beispiel:**

$$\left(\frac{1}{3}x - 1\right)(4 - x) \geq 0;$$

1. Faktor:  $x_0 = 3; m > 0;$

2. Faktor:  $x_0 = 4; m < 0;$

Vorzeichenverteilung:

$$L = [3; 4]$$

$\left(\frac{1}{3}x-1\right)$		3		4	
	-		+		+
$(4-x)$		+	+		-
$\left(\frac{1}{3}x-1\right)(4-x)$		-	+		-

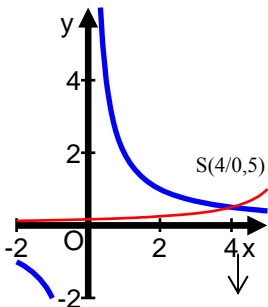
**Lösen von Bruchgleichungen**

Aufgabe:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{6-x}$$

a) *Grafische Lösung:*

Zeichnen der beiden Graphen z.B. mit Hilfe einer Wertetabelle und ablesen der x-Koordinate des Schnittpunktes.



b) Rechnerische Lösung

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{6-x}$$

Definitionsbereich:  $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$ Hauptnenner:  $HN : x(6-x)$ beide Seiten mit HN multiplizieren:  $\frac{2x(6-x)}{x} = \frac{x(6-x)}{6-x}$ Kürzen:  $2(6-x) = x$ Ausrechnen:  $x = 4$ Prüfe:  $x \in D$  dann  $L = \{4\}$ 

Notfalls noch Probe machen.

## 1.5 Lineare Gleichungssysteme

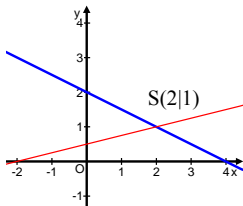
**Beispiel:** I.  $2x + 4y = 8;$ II.  $x - 4y = -2;$ 

a) Grafische Lösung

Auflösen der Gleichung (I) und (II) nach  $y$ ; Geraden einzeichnen;  
Schnittpunkt ist die Lösung.

(I)  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

(II)  $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$



b) *Additionsverfahren*

I.  $2x + 4y = 8;$

II.  $\underline{x - 4y = -2;}$

I. + II.  $3x = 6;$

$x = 2;$

in I. eingesetzt:

$y = 1;$

also:  $\mathbf{L} = \{(2|1)\}$

c) *Einsetzungsverfahren*

I.  $2x + 4y = 8;$

II.  $\underline{x - 4y = -2;}$

aus II.  $x = -2 + 4y;$

in I.  $2 \cdot (-2 + 4y) + 4y = 8;$

ausrechnen:  $y = 1;$

in I. (oder II.)

$x = 2;$

also:  $\mathbf{L} = \{(2|1)\}$

d) *Anzahl der Lösungen*

- Genau eine Lösung (Die Geraden schneiden sich.)
- Keine Lösung (Die Geraden sind echt parallel.)
- Unendlich viele Lösungen (Die Geraden sind identisch.)

**1.6 Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten**

**Potenzen:**  $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a;$  ( $a \in \mathbb{Q}$ )

$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$  ( $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ )

Beachte:  $a^1 = a$  und  $a^0 = 1$  für alle  $a \in \mathbb{Q}$

**Gleitkommadarstellung:**  $150000 = 1,5 \cdot 10^5$   
 $0,000000036 = 3,6 \cdot 10^{-7}$

### Potenzgesetze

Sei  $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ;  $p, q \in \mathbb{Z}$ , dann gilt

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad (\text{gleiche Basis})$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \quad (\text{gleicher Exponent})$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{rs} \quad (\text{Potenzieren einer Potenz})$$

## 2 Funktionen

Eine Zuordnung  $x \mapsto y$ , die jedem  $x$  aus dem Definitionsbereich genau ein  $y$  aus dem Wertebereich zuordnet, heißt **Funktion**.

**Graphen von Funktionen** werden von jeder Parallelen zur  $y$ -Achse höchstens einmal geschnitten.

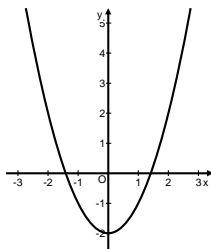
**Beispiel:**  $f: x \mapsto x^2 - 2$

*Definitionsmenge*  $D_f = \mathbb{Q}$

(Menge der  $x$ -Werte die in die Funktion eingesetzt werden dürfen)

*Wertemenge*  $W_f = [-2; \infty[$

(Menge der Werte die man durch einsetzen der  $x$ -Werte in die Funktion



erhält)

## 2.1 Direkt proportionale Funktionen

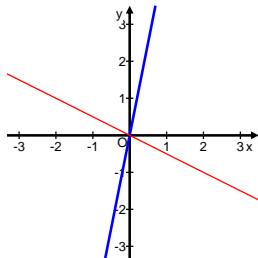
Zwei einander zugeordnete Größen  $x$  und  $y$  für die  $y = m \cdot x$  gilt ( $m \in \mathbb{Q}$ ), heißen *direkt proportional* zueinander.

Der Quotient  $\frac{y}{x} = m$  heißt

### Proportionalitätsfaktor.

Der Graph ist eine **Gerade** durch den Koordinatenursprung; er ergibt sich aus der Funktionsgleichung  $y = m \cdot x$ .

**Beispiele:**  $y = 5x$  oder  $y = -0,5x$



Der Faktor **m** legt die Steigung des Graphen fest und heißt daher auch **Steigungsfaktor**.

$m < 0$ : Graph fallend

$m = 0$ : Parallele zur x-Achse

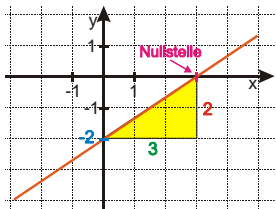
$m > 0$ : Graph steigend

## 2.2 Lineare Funktion

$f: x \mapsto m \cdot x + t$  mit  $D = \mathbb{Q}$

Der Graph ist eine Gerade mit Steigung  $m$  und Achsenabschnitt  $t$ .

z.B.:  $m = \frac{2}{3}$  ;  $t = -2$  ;



$f: x \mapsto \frac{2}{3}x - 2$  mit  $D = \mathbb{Q}$

Allgemein: Nullstelle:  $x = -\frac{t}{m}$  Steigung:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ;

## 2.3 Geradengleichung

$$y = mx + t$$

- Je größer  $|m|$  ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für  $m < 0$  **fällt**, für  $m > 0$  **steigt** die Gerade.
- Alle Geraden mit gleicher Steigung sind **parallel**.

Gilt für die Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  zweier Geraden  $g_1$  und  $g_2$ :

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \text{ so gilt: } g_1 \perp g_2.$$

## 2.4 Besondere Geraden

$a \in \mathbb{Q}$

$y = ax$ ; Ursprungsgerade

$y = x$ ; Winkelhalbierende I. und III. Quadrant

$y = -x$ ; Winkelhalbierende II. und IV. Quadrant

$y = a$ ; Parallele zur x-Achse durch  $(0|a)$

## 2.5 Punkt auf Geraden

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen:

z.B.:  $(4|5) \in g: y = 2x - 3$ ,

$$\text{denn } 5 = 2 \cdot 4 - 3.$$

## 2.6 Geradengleichung aus 2 Punkten aufstellen

z.B.: Gerade  $g$  durch  $A(2|5)$  und  $B(-2|4)$ :

Steigung:  $m = \frac{5-4}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$ ; also:

$$g: y = \frac{1}{4}x + t$$

weil  $A \in g$ , muss gelten:

$$5 = \frac{1}{4} \cdot 2 + t;$$

daraus bekommt man:

$$t = 4\frac{1}{2};$$

also:  $y = \frac{1}{4}x + 4\frac{1}{2}$

geht durch A und B.

## 2.7 Indirekt proportionale Funktionen

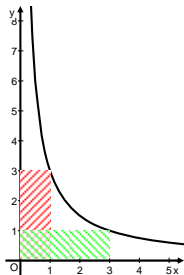
Zwei einander zugeordnete Größen  $x$  und  $y$  für die gilt:  $x \cdot y = k$  (fester Wert) heißen *indirekt proportional* zueinander.

**(Produktgleichheit)**

Der Graph ist eine **Hyperbel**; er ergibt sich

aus der Funktionsgleichung  $y = \frac{k}{x}$ .

Beispiel:  $x \cdot y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{x}$



## 2.8 Gebrochen-rationale Funktion

**Beispiele:**  $f_1(x) = \frac{4}{x}$ ;  $f_2(x) = \frac{2}{3-x} + 1$ ;  $f_3(x) = \frac{3x-4}{2x^2+1,5}$

Die Definitionsmenge enthält diejenigen Werte der Grundmenge für die der Nenner ungleich Null ist.

$$D_{f_1} = \mathbb{Q} \setminus \{0\};$$

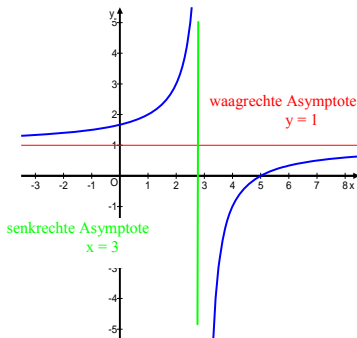
$$D_{f_2} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}; \quad D_{f_3} = \mathbb{Q}$$

Die Nullstellen des Nenners heißen **Definitionslücken**.

**Beispiel:**

$$f_2(x) = \frac{2}{3-x} + 1;$$

$$D_{f_2} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$$



### 3 Geometrie

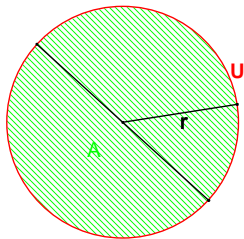
#### 3.1 Der Kreis

Der Kreis mit Radius  $r$  besitzt

den Umfang:  $U = 2r\pi = d\pi$

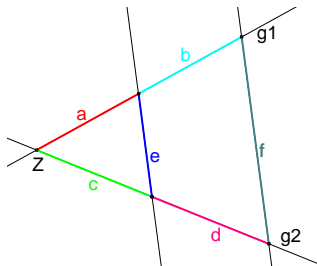
und

den Flächeninhalt:  $A = r^2\pi$

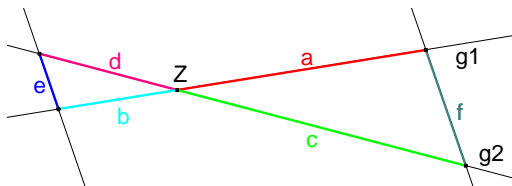


### 3.2 Der Strahlensatz

Voraussetzung: Zwei sich schneidende Geraden werden von zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten.



$$\frac{f}{e} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



$$\frac{f}{e} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

#### Strahlensatz:

- Je zwei Abschnitte auf \$g\_1\$ verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf \$g\_2\$.
- Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von \$Z\$ aus gemessenen entsprechenden Abschnitte



auf  $g_1$  (bzw.  $g_2$ ).

## Folgerungen:

- In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.
- In jedem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt  $S$ . Dabei teilt  $S$  jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1. (Die längere Strecke ist die Strecke vom Eckpunkt zum Schwerpunkt.)



## 3.3 Ähnlichkeitssätze

**W:W-Satz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

**S:S:S-Satz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.

**S:W:S-Satz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

**S:s:W-Satz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.



Schreibweise:  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

**Umkehrung:** Sind zwei Dreiecke ähnlich, so stimmen sie in den Winkeln überein und die Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich.

## 4 Stochastik

### 4.1 Ergebnisraum

Ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersagbar ist, nennt man **Zufallsexperiment**. Den Ausgang des Experiments nennt man **Ergebnis**. Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man im **Ergebnisraum**  $\Omega$  zusammen.

**Beispiele:**

1. Einmaliges Werfen eines Würfels:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

2. Werfen einer 1€- und einer 2€-Münze:

$$\Omega = \{\text{WW}; \text{WZ}; \text{ZW}; \text{ZZ}\}$$

### 4.2 Das Ereignis

Kein, ein oder mehrere Ergebnisse fasst man zu einem **Ereignis E** zusammen. Enelementige Ereignisse werden als **Elementarereignis** bezeichnet.

**Beispiele:**

$$E_1: \text{„Genau einmal Zahl“}: E_1 = \{\text{WZ}; \text{ZW}\}$$

$$E_2: \text{„Zweimal Zahl“}: E_2 = \{\text{ZZ}\} \text{ (Elementarereignis)}$$

Das **Gegenereignis**  $\bar{E}$  tritt ein, wenn E nicht eintritt.

$$E_1: \text{„Genau einmal Zahl“}$$

$$\bar{E}_1: \text{„Beide Münzen gleich“}: \bar{E}_1 = \{\text{WW}; \text{ZZ}\}$$

Sonderfälle:

Für das **sichere Ereignis** gilt:  $E = \Omega$

Für das **unmögliche Ereignis** gilt:  $E = \{ \}$

Treten die Ereignisse  $E_1$  **oder**  $E_2$  ein, so erhält man das Ereignis  $E_1 \cup E_2 = \{WZ; ZW; ZZ\}$  („ $E_1$  vereinigt mit  $E_2$ “)

### 4.3 Laplacewahrscheinlichkeit

Zufallsexperimente, bei denen jedes der möglichen Elementarereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt, heißen **Laplaceexperimente**.

Sei  $|A|$  die Mächtigkeit des Ereignisses A (Anzahl der Elemente von A) und  $|\Omega|$  die Mächtigkeit von  $\Omega$ .

Dann gilt für Laplaceexperimente:

$$P(E) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{"Anzahl der günstigen Elementarereignisse"}}{\text{"Anzahl der möglichen Elementarereignisse"}}$$

Beispiel:

„Werfen einer 1€- und einer 2€-Münze“

E: „Genau einmal Zahl“  $\Omega = \{WW; WZ; ZW; ZZ\}$

$$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= 1 - P(E) \\ P(\{\}) &= 0 \\ P(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$